2.5.2. Poisson sürecinin özellikleri

1. $h \to 0$ iken, $X_h \sim Pois(\lambda h)$, $f(x_h) = \frac{e^{-\lambda h}(\lambda h)^k}{k!}$, $k = 0,1, \ldots$

a) $P(X_h = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$

b) $P(X_h = 1) = \lambda h + o(h)$

c) $P(X_h \geq 2) = o(h)$

İspat. **a)** $P(X_h = 0) = e^{-\lambda h}$

$$= \left(1 - \frac{\lambda h}{1} + \underbrace{\frac{(\lambda h)^2}{2!} - \frac{(\lambda h)^3}{3!} + \cdots}_{o(h)}\right)$$

$$= 1 - \lambda h + o(h).$$

b) $\lim_{h \to 0} \overbrace{\left(\frac{\mathrm{P}(X_h = 1)}{h}\right)}^{g(h)} = \lim_{h \to 0} \frac{\lambda h e^{-\lambda h}}{h} = \lambda.$

Burada

$$g(h) = \lambda + o(h). \frac{\mathrm{P}(X_h = 1)}{h} = \lambda + o(h) \Rightarrow \mathrm{P}(X_h = 1) = \lambda h + 0(h)$$

c) $P(X_h \geq 2) = o(h)$.

$$P(X_h \geq 2) = 1 - [\mathrm{P}(X_h = 0) + \mathrm{P}(X_h = 1)]$$

$$= 1 - [1 - \lambda h + o(h) + \lambda h + o(h)] = o(h)$$

Ve ya

$$\lim_{\mathrm{h} \to 0} \overbrace{\left(\frac{P(X_h \geq 2)}{\mathrm{h}}\right)}^{f(h)} = \lim_{\mathrm{h} \to 0} \frac{1 - e^{-\lambda h} - \lambda h + 0(h)}{\mathrm{h}} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{\mathrm{h} \to 0} \overbrace{\left(\frac{P(X_h \geq 2)}{\mathrm{h}}\right)}^{f(h)} = 0,$$

$$\frac{P(X_h \geq 2)}{h} = 0 + o(h) \Rightarrow P(X_h \geq 2) = o(h)$$

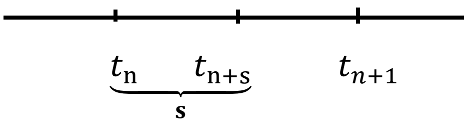
2. Poisson sürecinin geliş anları $t_1 < t_2 < \cdots < t_{\mathrm{n}}$ olsun. Bunlara sıçrayış anları denir. Bu dizi bağımsız artımlı bir dizidir.

$$T_1 = t_1 - t_0 \;,\; T_2 = t_2 - t_1 \;,\; \dots \;,\; T_n = t_n - t_{n-1}$$

a) T_i' ler λ parametreli üstel dağılıma sahiptirler .

b) T_i' ler bağımsızdır.

İspat **a)**



$$(\overbrace{t_{n+1} - t_n}^{T_{n+1}} > s) = X_{t_{n+s}} - X_{t_n} = 0$$

$$P(T_{n+1} > s) = P\big(X_{t_{n+s}} - X_{t_n} = X_S = 0\big) = e^{-\lambda s}$$

$$P(T_{n+1} > s) = e^{-\lambda s}$$

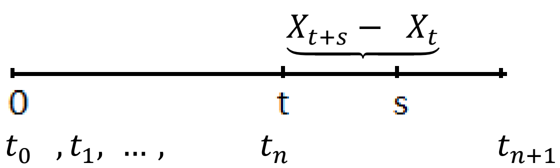
$$P(T_{n+1} \leq s) = 1 - e^{-\lambda s}$$

$k = 1,2,\dots,n,n+1$ için $F_{T_k}(s) = 1 - e^{-\lambda s}$, $s > 0$.

Bu sonuç gelişler Poisson ise gelişler arası süreninda üstel olduğunu gösterir.

b) Önce $n \geq 1$ için $t_{n+1} - t_n = T_{n+1}$'in $t_1, t_2, \dots, t_n$ 'lerden bağımsız olduğunu gösterelim.

$t_{n+1} - t_n$ 'ler $t_1, t_2, \dots, t_n$ 'lerden bağımsız ise T_i' ler de bağımsız olacaktır.



Poisson süreci bağımsız artımlı süreç olduğundan X_t ile $X_{t+s} - X_t$ de bağımsız olur. $X_{t+s} - X_t$ farkı, X_u $(u < t)$ değerlerinden bağımsızdır.

$P(A/B) = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$, A ile B bağımsız ve $P(B) \neq 0$.

$$P(X_{t+s} - X_t = 0 / X_u, u \leq t) = P(X_{t+s} - X_t = 0) \qquad (1)$$

$(X_u, u \leq t)$ ile ilgili bilgi $t_1, t_2, \dots, t_n$ ' lerle ilgili aynı bilgiye sahiptir. Çünkü Poisson süreci ancak $t_1, t_2, \dots, t_n$ ' lerde durum değiştirir.

$$P(X_{t+s} - X_t = 0 / t_1, t_2, \dots, t_n) \qquad (2)$$

(1) ve (2) ifadesinden;

$$P(X_{t+s} - X_t = 0 \,/\, t_1 \,,\, t_2, \dots, t_{\mathrm{n}}) = P(X_{t+s} - X_t = 0) = e^{-\lambda s} \qquad (3)$$

(3) eşitliğinin sağ tarafı $t_1 \,,\, t_2, \dots, t_{\mathrm{n}}$ 'lere bağlı değildir. Böylece $X_{t_{n+s}} - X_{t_n}$'de $t_1 \,,\, t_2, \dots, t_{\mathrm{n}}$ ' lere bağlı değildir.

$$P(X_{t_{n+s}} - X_{t_n} = 0 \,/\, t_1 \,,\, t_2, \dots, t_{\mathrm{n}}) = e^{-\lambda s} \qquad (4)$$

(4) ifadesini şu şekilde de yazabiliriz.

$$P(t_{n+1} - t_n > s / t_1 \,,\, t_2, \dots, t_{\mathrm{n}}) = P(t_{n+1} - t_n > s) \qquad (5)$$

Böylece (5) eşitliği $t_1 \,,\, t_2, \dots \,, t_{\mathrm{n}}$ ' lerin bağımsız artımlı süreç olduğunu gösterir.

3. $\{X_{\mathrm{t}} \,, t \geq 0\}$ ve $\{Y_{\mathrm{t}} \,, t \geq 0\}$ ortalama oranları λ_1 ve λ_2 olan bağımsız Poisson süreçleridir.

$Z_t = X_t + Y_T$ şeklinde tanımlandığına göre $\{\, Z_t, t \in T \,\}$ olmak üzere $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ Parametresi ile Poisson sürecidir.

İspat. $P(X_t = x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}(\lambda_1 t)^x}{x!}, x = 0,1,2, \dots$

$$P(Y_t = y) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}(\lambda_2 t)^y}{y!} \quad , \quad y = 0,1,2, \dots$$

$$Z_t = X_t + Y_t \ , \qquad z = x + y \quad \Rightarrow \quad x = z - y$$

Konvolüsyon formülü

$$P_{Z_t}(z) = \sum_{y=0}^{z} P_{X_t}(z-y) P_{Y_t}(y)$$

$$P_{Z_t}(z) = \sum_{y=0}^{z} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}(\lambda_1 t)^{z-y}}{(z-y)!} . \frac{\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}(\lambda_2 t)^y}{y!}$$

$$= \frac{e^{-t(\lambda_1+\lambda_2)}}{z!} \sum_{y=0}^{z} \binom{z}{y} (\lambda_1 \mathrm{t})^{z-y} (\lambda_2 t)^y$$

$$= \frac{e^{-t(\lambda_1+\lambda_2)}}{z!} [\underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2\,)}_{\lambda}]^z$$

$$P_{\,Z_t}(z) = \frac{e^{-t\lambda}\,(\lambda t)^z}{z!} \qquad z = 0,1,2, ..$$

Ödev. $\{X_t^{(1)}\,,\ t \geq 0\}$, $\{X_t^{(2)}\,,\ t \geq 0\}$, … , $\{X_t^{(n)}\,,\ t \geq 0\}$, n-tane bağımsız stokastik süreç veriliyor ve ortalama oranları sırasıyla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ve $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ olarak alındığında $Y_t = \sum_{i=1}^{n} X_t^{(i)}$ nin de bir Poisson süreci olduğunu gösteriniz.

4. $\{X_t\,, t \geq 0\}$, λ parametreli Poisson süreci olsun. $t_1 < t_2 < \cdots$ geliş anlarıdır.

$X_t = 1$ koşulu altında t_1 geliş anı $(0, t)$ aralığında düzgün dağılıma sahiptir.

İspat. t_1 geliş anının dağılım fonksiyonu koşulsuz durumda aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$H_{t_1}(x) = P\,(t_1 < x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & ; \quad x \geq 0 \\ 0 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

t_1 ' in $X_t = 1$ koşulu altında dağılımını bulalım. Bunu ispatlamak için aşağıdaki koşullu olasılığını bulalım.

$$P(a < t_1 < b\ / X_t = 1) = ?$$

$$P(X_t = 1) = e^{-\lambda t} \lambda t \quad ; \quad t > 0\,,\ \lambda > 0$$

$$\underbrace{0 \qquad a}_{geliş\ yok}\ \underbrace{\qquad t_1 \qquad b}_{geliş\ var}\ \underbrace{\qquad t}_{geliş\ yok}$$

$$X_a\,, X_b - X_a\,,\ X_t - X_a \qquad \Rightarrow \qquad X_a = 0\,,\ X_{b-a} = 1\,, X_{t-b} = 0$$

$$P(a < t_1 < b\,/\,X_t = 1) = \frac{P(a < t_1 < b\,, X_t = 1)}{P(X_t = 1)}$$

$$= \frac{P(X_a = 0\,,\ X_{b-a} = 1\,,\ X_{t-b} = 0)}{P(X_t = 1)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda a}\, e^{-\lambda(b-a)}\, \lambda\,(b-a) e^{-\lambda(t-b)}}{e^{-\lambda t}\,(\lambda t)'}$$

$$= \frac{b-a}{\mathrm{t}} \qquad ,(0 < a < b < t) \quad \textbf{(1)}$$

Düzgün dağılım $X \sim U(a, b)$ için olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & ; a \leq x \leq b \\ 0 & ; \text{d. d.} \end{cases}$$

$X \sim U(0,t)$ için olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{t} & ; 0 \leq x \leq t \\ 0 & ; \text{d. d.} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ;\ x \leq 0 \\ \frac{x}{t} & ;\ 0 < x \leq t \\ 1 & ;\ t \leq x \end{cases}$$

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \frac{b}{t} - \frac{a}{t} = \frac{b-a}{t}$$

Yukarıdaki (1) eşitliği ile son yazılan eşitlik aynı olduğundan bu özellik doğrulanmış olur.